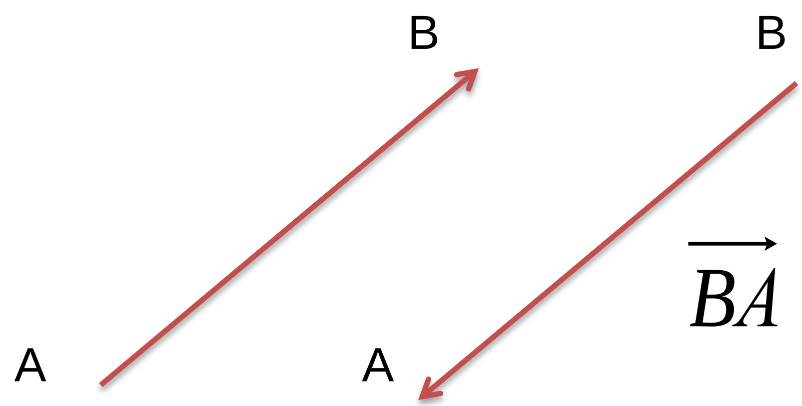
Векторы
и действия с ними

1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Опр. ***Вектор*** (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок ***AB***, у которого одна из ограничивающих его точек ***A*** принимается за начало, а вторая ***B*** – за конец.

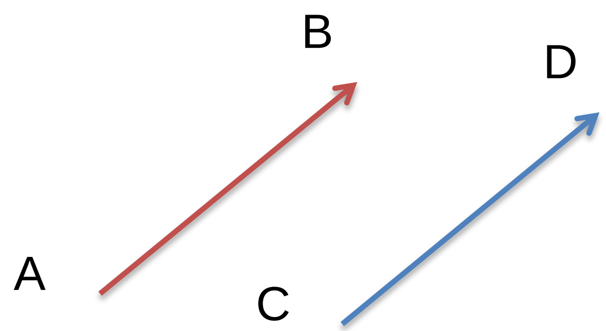
$\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$



Опр. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;
2) имеют одинаковые длины ($\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$) и одинаково направлены.

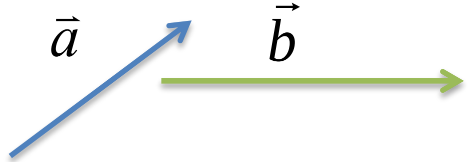
Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.

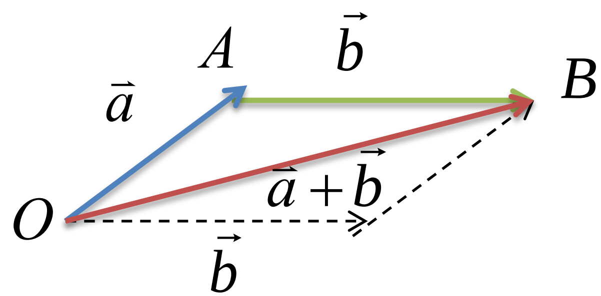


Сложение векторов

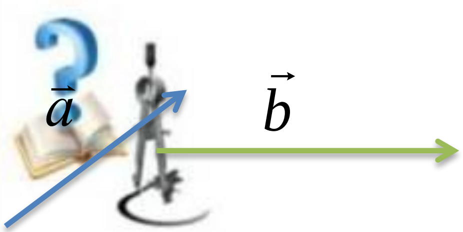
- Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор $\vec{b}$, получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

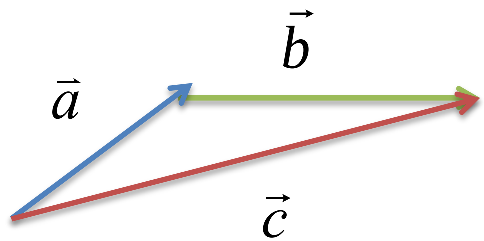
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$





Правило параллелограмма



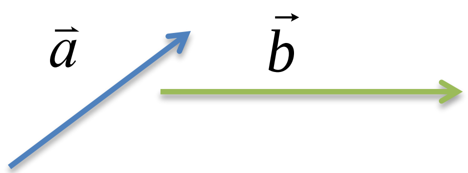


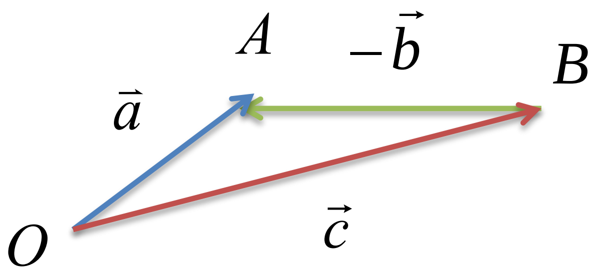
Правило треугольника

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

2. Разность векторов

Опр. ***Разность*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}-\vec{b}$ и определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного вектора $-\vec{b}$.





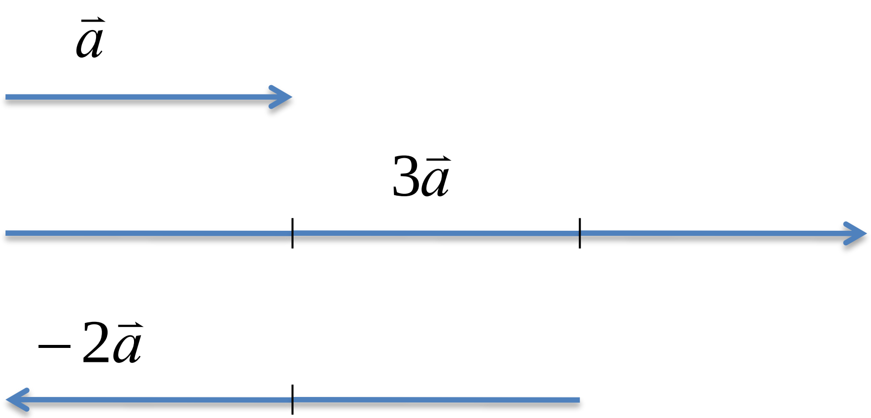
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

3. Умножение вектора на число

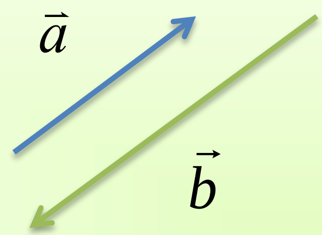
Опр. ***Произведение*** вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda\vec{a}$.

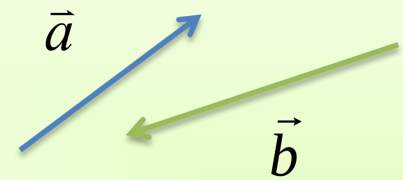
Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



Опр. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются ***неколлинеарными***.



Коллинеарные векторы



Неколлинеарные векторы

Нулевой вектор ***коллинеарен*** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Опр. Вектор $\vec{a}$ называется ***коллинеарным*** прямой ***l***, если этот вектор лежит либо на прямой ***l***, либо прямой, параллельной ***l***.

Первый признак коллинеарности двух ненулевых векторов

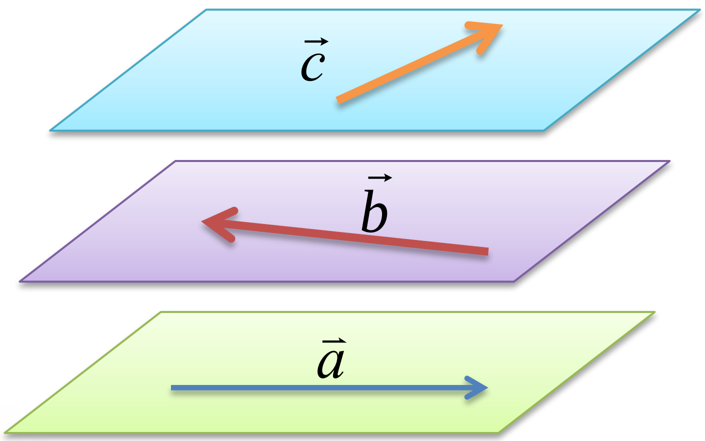
(следует из определения)

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \mu \cdot \vec{b},\ \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a},$$

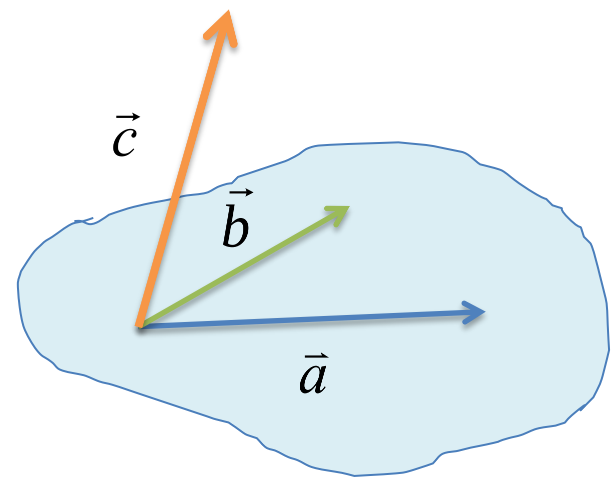
где λ и μ - некоторые числа.

Опр. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются ***некомпланарными***.

Если хоть один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой вектор, то эти векторы компланарны.



Компланарные векторы



Некомпланарные векторы

Множество всех свободных векторов на прямой будем обозначать R_1, на плоскости - R_2, в пространстве - R_3.

Опр. Множества R_1, R_2, R_3 вместе с введёнными выше линейными операциями над векторами называются также ***векторными пространствами*** R_1, R_2, R_3.

Опр.

1) ***Базисом*** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) ***Базисом*** на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

3)***Базисом*** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Опр. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются ***компонентами*** или ***координатами*** вектора в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

1) равные векторы имеют одинаковые координаты,

2) при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha)\vec{e}_1 + (\lambda\beta)\vec{e}_2 + (\lambda\gamma)\vec{e}_3$$

3) при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3$$

Опр. Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$- некоторая система векторов пространства R (R_1, R_2 или R_3), тогда любой вектор вида $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов***

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n \quad , где\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n -$$

некоторые действительные числа, называемые ***коэффициентами линейной комбинации***.

Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он ***разложен*** по этим векторам.

Опр. Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

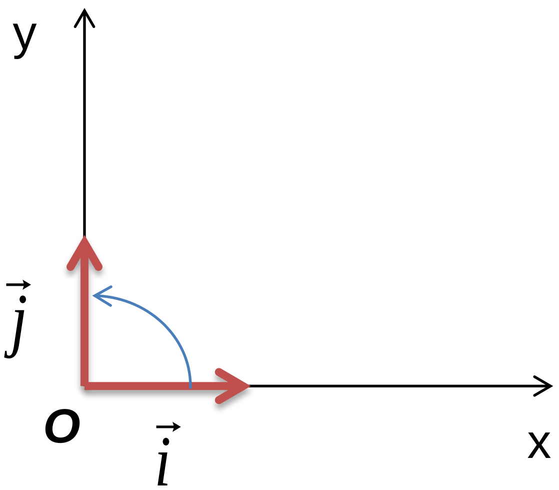
Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются ***линейно независимыми***.

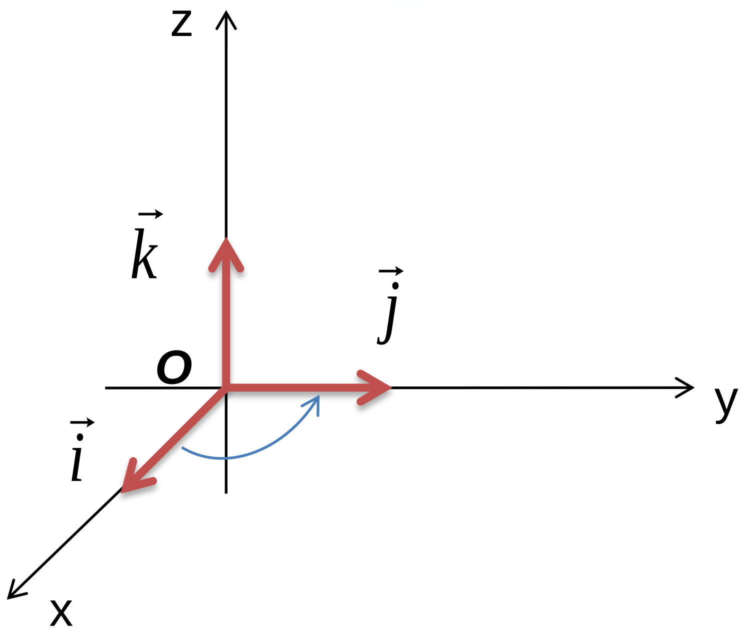
Свойства

1. Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.
5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

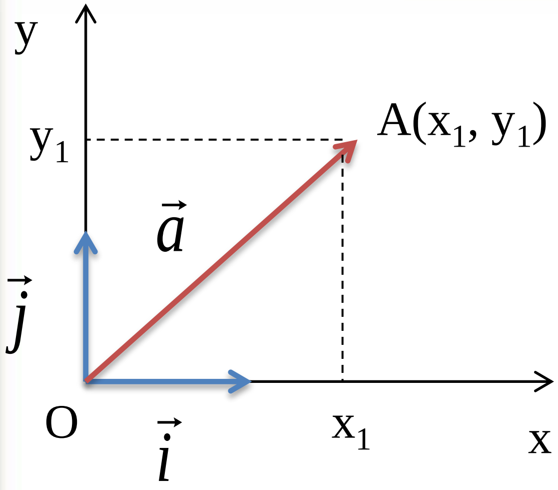
6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ





- ***O*** – произвольная точка
- $\vec{i}, \vec{j} \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- ***Oxy*** – прямоугольная система координат на плоскости
- ***Oxyz*** – декартовая система координат в пространстве
- ***x*** – абсцисса
- ***y*** – ордината
- ***z*** – аппликата



Вектор $\vec{a}$ заданный на плоскости ***Oxy***, может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

где $\boldsymbol{x_1, y_1}$ – проекции вектора на соответствующие оси координат называются ***прямоугольными координатами вектора***.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ с координатами $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{y_1}$ обозначается: $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и называется ***радиус-вектором*** точки А.

Задача 1. Найти координаты вектора, если даны координаты его начальной и конечной точек.

Решение.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Но $\overrightarrow{OA} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\overrightarrow{OB} = \left(x_2, y_2, z_2\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$.

Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ***коллинеарны*** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Направление вектора определяется углами ***α***, ***β***, ***γ***, образованными с осями координат Ox, Oy, Oz.

Косинусы этих углов определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}$$

3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Опр. ***Скалярным произведением*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **<u>число</u>**, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Если $\vec{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$

$$\boxed{\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a}=(15;-6;-5)$ $\vec{b}=(20;3;16)$

Найти: 1) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

Разность двух векторов:

$$\vec{b}-\vec{a}=(20-15;3-(-6);16-(-5))=(5;9;21)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=15\cdot5+(-6)\cdot9+(-5)\cdot21=-84$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 2) $|\vec{a}|$

Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{225 + 36 + 25} = \sqrt{286}$$

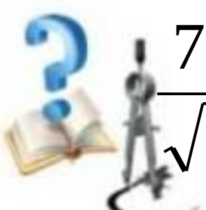
Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 3) $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right)$ если $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(15; -6; -5) + (20; 3; 16) = (50; -9; 6)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = \frac{15 \cdot 50 + (-6) \cdot (-9) + (-5) \cdot 6}{\sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2}\sqrt{50^2 + (-9)^2 + 6^2}} =$$



$$\frac{750 + 54 - 30}{\sqrt{286} \cdot \sqrt{2617}} = \frac{774}{\sqrt{748462}}$$

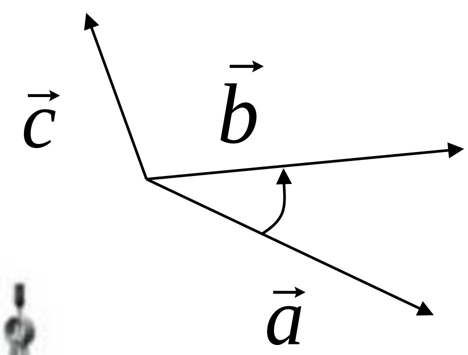
Задача. Даны векторы $\vec{a}=(15;-6;-5)$ $\vec{b}=(20;3;16)$

Найти: 4) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

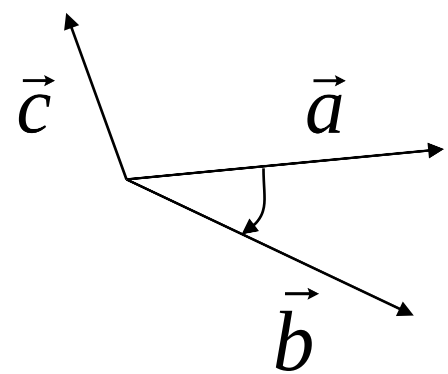
$$\vec{a}+\vec{b}=(35;-3;9)$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{35^2+(-3)^2+9^2}=\sqrt{1225+9+81}=\sqrt{1315}$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют ***правую тройку*** (***левую тройку***) или ***положительно ориентированы*** (***отрицательно ориентированы***), если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Правая тройка



Левая тройка

Векторное произведение векторов

Опр. ***Векторным произведением*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий **вектор** $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

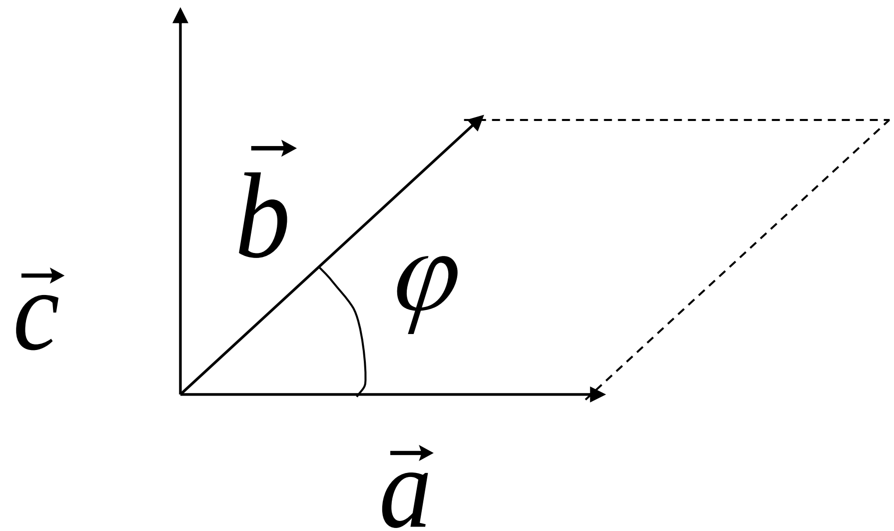
1) вектор ортогонален $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

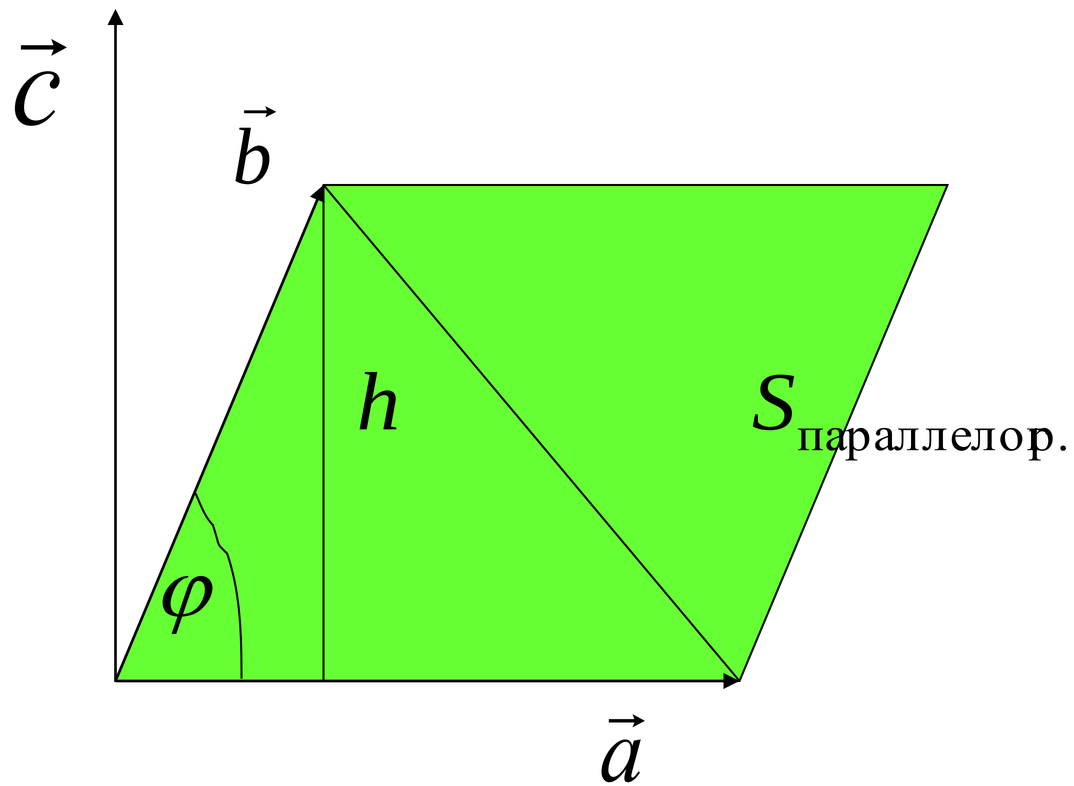
3) векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



Геометрический смысл



$$2S_{\text{треуг.}} = S_{\text{параллелогр.}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Свойства

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}),$

2. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},$

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},$

4. $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

5. *Критерий коллинеарности векторов*

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},$$

6. **Теорема** (запись векторного произведения в координатах)

Если

$$\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right) \text{ и } \vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(псевдоопределитель)

Смешанное произведение векторов

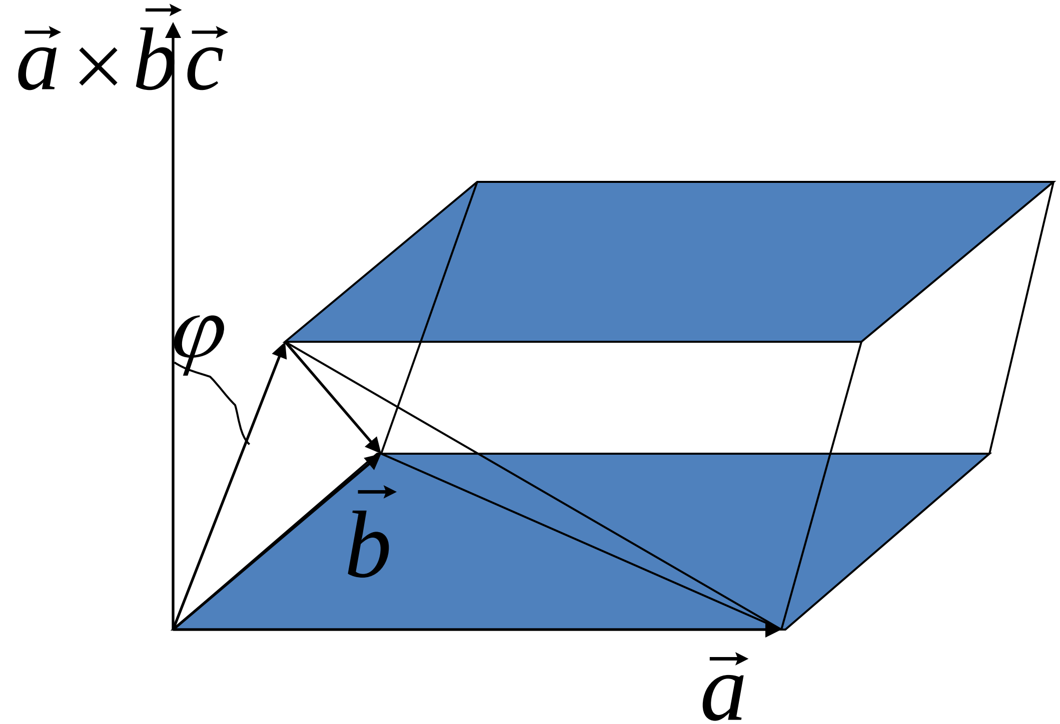
Опр. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется ***число***, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определяемое следующим образом

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \vec{c}$$

Другие обозначения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$$

Свойства

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

2. $\lambda \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

3. $\vec{a}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{a} = 0$

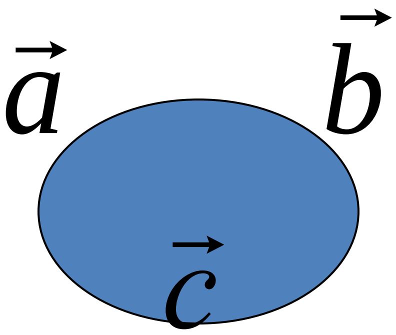
4. $(\vec{a} + \vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

5. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$

не нарушается круговой порядок

6. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

нарушается круговой порядок



7. Теорема (запись смешанного произведения в координатах)

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

8. Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (линейно зависимы)

$$\Leftrightarrow$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$